

ЛЕКЦИЯ 3

§4. Толық дифференциалды теңдеулер

4.1. Симметриялық түрде берілген

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

дифференциалдық теңдеудің сол жағы кейбір екі айнымалы $u(x, y)$ функциясының толық дифференциалына тең болса, яғни

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du(x, y) \quad (2)$$

онда (1) теңдеуді толық дифференциалды теңдеу деп атайды. Соңғы (2) теңдікті пайдалансақ, (1) теңдеуді былай жазуға болады:

$$du(x, y) = 0 \quad (3)$$

Бұдан

$$u(x, y) = C \quad (4)$$

өрнегі (1) теңдеудің жалпы интегралы болатынын көреміз. Сондықтан осы u функциясын табу жолын келтірейік.

Әдетте, берілген теңдеудің толық дифференциалдылығын бірден байқау мүмкін емес. Сондықтан ондай жағдайды анықтайтын белгіні келтірейік.

Айталық, (1) теңдеудегі $M(x, y)$ және $N(x, y)$ функциялары кейбір D облысында өзінің дербес туындылары $\frac{\partial M}{\partial y}$ және $\frac{\partial N}{\partial x}$ мен бірге үздіксіз функциялар болсын.

Теорема. Берілген (1) теңдеу толық дифференциалды теңдеу болу үшін бір байланысты D облысында

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x} \quad (5)$$

тепе-теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі. Айталық, (1) теңдеудің сол жағы кейбір $u(x, y)$ функциясының толық дифференциалы болсын:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (6)$$

Бұл тепе-теңдіктен мына қатынастарды аламыз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \quad (7)$$

Соңғы қатынастардың біріншісін y бойынша, екіншісін x бойынша дифференциалдасақ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (8)$$

тепе-теңдіктері шығады. Шарт бойынша тепе-теңдіктердің оң жақтары үздіксіз. Ендеше, олардың сол жақтары да үздіксіз. Ал үздіксіз функцияның аралас дербес туындылары өзара тең болады да,

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \quad (9)$$

тепе-теңдігі алынады.

Жеткіліктілігі. Айталық, (5) шарт орындалсын. Алдымен (7) қатынастардың біріншісін қанағаттандыратын $u(x, y)$ функциясын іздейік. Сол бірінші қатынасты x бойынша интегралдасақ, мынандай функция аламыз:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y), \quad (10)$$

мұнда $\varphi(y)$ – тек y -ке байланысты кез келген функция және ол үздіксіз дифференциалданатын функция болсын.

Енді осы $\varphi(y)$ функциясын (7) қатынастардың екіншісі орындалатындай етіп алайық, яғни

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y) \right) = N(x, y) \quad (11)$$

Бұл жерде мына теңдікті көрсете кетейік:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(x, y) dx = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx = \int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x} dx = N(x, y) \Big|_{x_0}^x = N(x, y) - N(x_0, y)$$

Сондықтан (11) қатынас былай жазылады:

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y)$$

немесе

$$\varphi'(y) = N(x_0, y) \quad (12)$$

Осыдан

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy \quad (13)$$

Осы табылған $\varphi(y)$ функциясын (10) өрнекке апарып қоятын болсақ,

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy \quad (14)$$

функциясын аламыз. Ал бұл функцияны кез келген C санына теңестірсек, онда берілген (1) теңдеудің жалпы интегралын аламыз:

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C \quad (15)$$

Егер $u(x, y)$ функциясын құруды (7) қатынастардың екіншісінен бастасақ, онда (1) теңдеудің жалпы интегралының түрі мынандай болады:

$$\int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy = C \quad (16)$$

Мысал-1. $(2xy - 1)dx + (3y^2 + x^2)dy = 0$ теңдеуінің жалпы интегралын табу керек болсын.

Шешуі: $M(x, y) = 2xy - 1$, $N(x, y) = 3y^2 + x^2$,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x, \quad \text{яғни} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Бұл теңдеу толық дифференциалды теңдеу. (15) өрнекті пайдаланып жалпы интегралды іздейміз. Мұнда $x_0 = 0, y_0 = 0$ деп алайық. Сонда:

$$\int_0^x (2xy - 1) dx + \int_0^y (3y^2 + x_0^2) dy = C$$

немесе

$$x^2 y - x + y^3 = C$$

4.2. Көп жағдайда берілген (1) теңдеу толық дифференциалды теңдеу бола бермейді. Бұл жағдайда теңдеуді қолайлы бір функцияға көбейту арқылы толық дифференциалды теңдеуге келтіруге болады. Егер ондай функция табылып жатса, оны интегралдаушы көбейткіш деп атайды. Интегралдаушы көбейткішке көбейткеннен әдепкі теңдеудің жалпы шешімі өзгермейді.

Интегралдаушы көбейткішті табу үшін (1) теңдеудің екі жағын белгісіз $\mu = \mu(x, y) \neq 0$ функциясына көбейтіп, мына теңдеуді аламыз:

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \quad (17)$$

Бұл теңдеу толық дифференциалды болу үшін жоғарыда көрсетілген қажетті шартты жазайық:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}. \quad (18)$$

Бұл теңдікті ашып жазсақ:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x}$$

немесе

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \quad (19)$$

теңдігін аламыз. Бұл теңдеу – дербес туындылы дифференциалдық теңдеу. Оны шешу көп жағдайда (1) теңдеуді шешуден оңайға түспейді. Ол тек кейбір дербес жағдайларда ғана интегралданады.

Әдетте, интегралдық көбейткіш тек x -қа, не y -ке ғана байланысты түрде ізделінеді. Сондықтан дербес туындылы (19) теңдеу жәй дифференциалдық теңдеуге айналады да, оның шешімін табу оңайланады.

Жалпы, интегралдық көбейткішті іздеу жолы өз алдына бір мәселе. Оған біз тоқталмаймыз.